

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ – 8 FEBRUARIE 2026

CLASA A IX-a

SUBIECTUL I (40 de puncte)

Pentru fiecare dintre următoarele 10 probleme, una singură dintre cele cinci variante de răspuns este corectă. Pe formularul de înregistrare a răspunsurilor la problemele cu alegere multiplă (grilă), indică varianta corectă de răspuns:

- (4p) 1. Câte numere naturale de 5 cifre au atât prima cifră, cât și ultima cifră, egală cu 7?
A. 1 B. 10000 C. 1000 D. 9000 E. 90000
- (4p) 2. Fie $x, y \in \mathbb{R}$ astfel încât $|2x+1| \leq 10$ și $|3y-2| \leq 11$. Valoarea minimă a expresiei $E(x, y) = 3x + 2y$ este egală cu:
A. $-\frac{49}{2}$ B. $-\frac{45}{2}$ C. $-\frac{41}{2}$ D. $-\frac{49}{6}$ E. $-\frac{41}{6}$
- (4p) 3. Suma elementelor mulțimii $A = \left\{ n \in \mathbb{Z} \mid \frac{n^2 + 2n + 5}{n+1} \in \mathbb{Z} \right\}$ este:
A. -10 B. -8 C. -6 D. -4 E. -2
- (4p) 4. Suma soluțiilor ecuației $\left\lceil \frac{2x+1}{3} \right\rceil = \frac{x-1}{2}$ este egală cu:
A. -15 B. -13 C. -11 D. -9 E. -4
- (4p) 5. Dacă $a, b, c \in (0, \infty)$ și $abc = \sqrt{3}$, atunci valoarea minimă a expresiei $E = (a+b)(b+c)(c+a)$ este egală cu:
A. $\sqrt{216}$ B. $\sqrt{192}$ C. $\sqrt{147}$ D. $\sqrt{108}$ E. $\sqrt{75}$
- (4p) 6. Se consideră triunghiul ABC și punctul M astfel încât $7 \cdot \overrightarrow{AM} = 5 \cdot \overrightarrow{AB} + 2 \cdot \overrightarrow{AC}$. Valoarea raportului $\frac{BM}{MC}$ este egală cu:
A. $\frac{2}{7}$ B. $\frac{5}{7}$ C. $\frac{10}{7}$ D. 2,5 E. 0,4
- (4p) 7. În patrulaterul $ABCD$ se notează cu M mijlocul laturii AB și cu N mijlocul laturii CD . Vectorul \overrightarrow{MN} este egal cu:
A. $\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$ B. $\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD})$ C. $\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD})$ D. $\frac{1}{2}(\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{AC})$ E. \overrightarrow{AC}

- (4p) 8. Fie AB și CD două coarde perpendiculare ale unui cerc de centru O și $AB \cap CD = \{P\}$. Dacă $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} = \alpha \overrightarrow{PO}$, atunci α este egal cu:
- A. 2 B. $\frac{3}{2}$ C. -2 D. 4 E. -3
- (4p) 9. Fie triunghiul ABC , O centrul cercului său circumscris, A' punctul diametral opus lui A în cerc și H' ortocentrul triunghiului BCA' . Atunci $\overrightarrow{OH'}$ este egal cu:
- A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{OA}$ B. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC}$ C. $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{BA}$ D. $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AC}$ E. $\vec{0}$
- (4p) 10. Fie $ABCD$ un trapez cu bazele AB și CD astfel încât $AB = 2 \cdot CD$. Fie $M \in (AB)$ astfel încât $\frac{AM}{AB} = \frac{1}{3}$ și $P \in (DM)$ astfel încât $\frac{DP}{PM} = x$. Știind că punctele A, P, C sunt coliniare, valoarea numărului real x este:
- A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{1}{2}$ C. 2 D. $\frac{3}{2}$ E. $\frac{1}{4}$

La subiectele II și III scrie rezolvările complete:

SUBIECTUL II (25 de puncte)

Fie $a, b \in \mathbb{N}$. Arătați că, dacă mulțimea

$$A = \left\{ n \in \mathbb{N} \mid \left[\sqrt{(n+a)(n+b)} \right] = n+a \right\}$$

conține cel puțin un număr natural *nenul*, atunci $A = \mathbb{N}$.

(Notăția $[x]$ semnifică partea întreagă a numărului real x).

Gazeta Matematică nr. 9 / 2025

SUBIECTUL III (25 de puncte)

Se consideră triunghiul ABC și punctele D, E, F în planul triunghiului astfel încât $\overrightarrow{AD} = \frac{25}{11} \cdot \overrightarrow{AC}$,

$$2 \cdot \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{EB} \text{ și } 11 \cdot \overrightarrow{BF} = 4 \cdot \overrightarrow{BC}.$$

a) Arătați că dreptele DF și CE sunt paralele.

b) Fie K un punct în planul triunghiului ABC astfel încât $\overrightarrow{AK} = x \cdot \overrightarrow{AC}$, unde $x \in \mathbb{R}$. Determinați valoarea lui x știind că punctele K, E, F sunt coliniare.

Note: Toate subiectele sunt obligatorii.

Se acordă 10 puncte din oficiu.

Timp de lucru: 3 ore.